

---

## TD2: Applications linéaires

---

### Exercice 1. Révisions.

1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x+2y-1 \quad ; \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x-y, 2x) \quad ; \quad f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto x(0, y).$$

2. Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que

$$f(1, 0, 0) = (2, 1) \quad ; \quad f(0, 1, 0) = (1, -1) \quad ; \quad f(0, 0, 1) = (0, 1).$$

Déterminer  $f(x, y, z)$ .

### Exercice 2. Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires:

1.  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2, P(X) \mapsto (P(0), P'(1))$
2.  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto A(X)P(X)$  où  $A \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme fixé.
3.  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P(X)^2$
4.  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto XP(X) + P'(X)$

### Exercice 3. Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ . Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires:

1.  $\varphi_1 : E \rightarrow E, (\varphi_1(f))(x) = f(x)^2$
2.  $\varphi_2 : E \rightarrow E, (\varphi_2(f))(x) = f(x^2)$
3.  $\varphi_3 : E \rightarrow E, (\varphi_3(f))(x) = \int_0^x f(t)dt.$

### Exercice 4. On définit l'application suivante :

$$D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P'(X),$$

1. Montrer que l'application  $D$  est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de  $D$ .
3. Déterminer l'image réciproque de  $\mathbb{R}_n[X], \forall n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 5. (\*) Soit $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la première dérivée est continue.

1. Montrer que  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est un s.e.v. de  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
2. Montrer que la dérivation  $D$ :

$$C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(x) \mapsto f'(x), \tag{1}$$

est un épimorphisme (une application linéaire surjective).

**Exercice 6.** Soient  $E, F, G$  trois  $K$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que :

1.  $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))$
2.  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ .
3.  $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f))$
4.  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ .

**Exercice 7.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence :

$$E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2).$$

Cette équivalence reste-elle vraie en dimension infinie ?

**Exercice 8.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et soient  $E_1$  et  $E_2$  deux s.e.v. de dimension finie, on définit l'application linéaire  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$  par  $f(u, v) = u + v$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ . Montrer que  $\text{Ker}(f)$  est isomorphe à  $E_1 \cap E_2$ .
3. Que donne le théorème du rang ?

**Exercice 9.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \iff (f^2 = 0 \text{ et } n = 2 \text{ rg}(f))$$

**Exercice 10.** Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $p$  est un projecteur si et seulement si  $\text{Id} - p$  l'est aussi.
2. Exprimer alors  $\text{Im}(\text{Id} - p)$  et  $\text{Ker}(\text{Id} - p)$  en fonction de  $\text{Im}(p)$  et  $\text{Ker}(p)$ .

**Exercice 11.** Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$$

1. Montrer que  $f$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $f$ .
2. Etablir que  $\text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$  sont des s.e.v. supplémentaires de  $E$ .

**Exercice 12.** (\*) Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g.$$

1. Montrer que  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(g)$  sont supplémentaires dans  $E$ .
2. Justifier que  $f(\text{Im}(g)) = \text{Im}(f)$ .

**Exercice 13.** (\*) Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel,  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que pour tout  $x \in E$ , la famille  $(x, f(x))$  est liée. Démontrer que  $f$  est une homothétie (c'est-à-dire, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $f = \lambda \text{id}_E$ ).

**Exercice 14.** Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  vérifiant  $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$ .

1. Montrer que  $r = p + q - p \circ q$  est un projecteur.
2. (\*) Montrer que :

$$\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q), \quad \text{et} \quad \text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q).$$